лющего проективного пространства допускает уточнение. Автору удалось доказать (посредством значительно более сложных рассуждений) возможность погружения в случае $N > \frac{m^2}{2}+2m$.

Автор выражает благодарность Рыбникову А.К., под чьим руководством выполнена эта работа.

Библиографический список

1. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139-190.

УДК 514.76

СИММЕТРИЧЕСКИЕ 2-ТЕНЗОРЫ С ПОСТОЯННЫМ СЛЕДОМ

С.Е.Степанов

(Владимирский педагогический институт)

В предлагаемой работе предпринята попытка соединить два развивающихся независимо метода дифференциальной геометрии: "технику Бохнера" и "метод линейных представлений". Объектом для изучения нами выбраны поля симметрических 2-тензоров с постоянным следом на римановом многообразии. Хотя для иллюстрации эффективности исследований может быть взят другой объект.

1. Рассмотрим на n-мерном римановом многообразии (M,g) со связностью Леви-Чивита ∇ симметрическое тензорное поле φ с постоянным следом ($tr_g\varphi = const$). Тензорное поле $\nabla\varphi$ есть сечение расслоения $T^*M \otimes S^2_0 M \to M$. Разложение этого расслоения на неприводимые относительно действий ортогональной группы $O(n)$ компоненты имеет вид [1] : $T^*M\otimes S^2_0 M \cong S^3_0 M \oplus (T^*M) \oplus Y^1_2$. Тогда

$$\nabla\varphi = Pr_{S^3_0 M}\nabla\varphi + Pr_{(T^*M)}\nabla\varphi + Pr_{Y^1_2}\nabla\varphi, \tag{1}$$

где

$$(Pr_{S^3_0 M}\nabla\varphi)(X,Y,Z) = (\delta^*\varphi)(X,Y,Z) + \frac{2}{3(n+2)}\{(\delta\varphi)(X)g(Y,Z) + (\delta\varphi)(Y)g(Z,X) + (\delta\varphi)(Z)g(X,Y)\},$$

$$(Pr_{(T^*M)}\nabla\varphi)(X,Y,Z) = \frac{n}{(n+2)(n-1)}\{\frac{2}{n}(\delta\varphi)(X)g(Y,Z) - (\delta\varphi)(Y)g(X,Z) - (\delta\varphi)(Z)g(Y,X)\}.$$

И, наконец, ковариантная производная $\nabla\varphi$ будет принадлежать подпространству Y^1_2 в том и только в том случае, если $\delta^*\varphi = \delta\varphi = 0$. Здесь дифференциальный оператор δ^* представляет собой композицию ковариантной производной с симметризацией, а δ – формально сопряженный к нему оператор, называемый дивергенцией.

Вследствие разложения (1) инвариантным образом выделяются на (M,g) семь классов симметрических тензорных полей с постоянным следом: $R_0 = \{\varphi / \nabla\varphi = 0\}$, $R_1 = \{\varphi/\nabla\varphi \in S^3_0 M\}$, $R_2 = \{\varphi/\nabla\varphi \in (T^*M)\}$, $R_3 = \{\varphi/\nabla\varphi \in Y^1_2\}$,

$$R_4 = R_1 \oplus R_2, \quad R_5 = R_1 \oplus R_3, \quad R_6 = R_2 \oplus R_3$$

Например, класс R_1 состоит из кодацциевых тензорных полей [2] с постоянным следом.

2. Полагаем (M,g) компактным ориентированным многообразием. Для 1-формы θ с компонентами

$$\theta(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{n}\{\sum_{k=1}^{n}(\nabla_{e_k}\varphi)(e_i,e_j)\,\varphi(e_k,e_j) + (\delta\varphi)(e_j)\,\varphi(e_i,e_j)\},$$

где $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ – локальное поле ортонормированных реперов; на основании теоремы Грина выводим следующую интегральную формулу [3]:

$$\int_M \sum_{i,j,k=1}^{n}\{S(e_i,e_j)\,\varphi(e_i,e_k)\,\varphi(e_j,e_k) - R(e_i,e_j,e_k,e_l)\,\varphi(e_i,e_k)\,\varphi(e_j,e_l) + (\nabla_{e_i}\varphi)(e_j,e_k)(\nabla_{e_j}\varphi)(e_i,e_k) - (\delta\varphi)(e_j)(\delta\varphi)(e_j)\}\,dv = 0. \tag{2}$$

Здесь R и S – тензоры кривизны и Риччи многообразия (M,g).

В произвольной точке $x \in M$ перейдем к новому ортонормированному реперу $\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_n\}$, такому, что $\varphi(e'_i,e'_j) = \lambda_i\delta_{ij}$, тогда

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\{S(e_i,e_j)\varphi(e_i,e_k)\varphi(e_j,e_k) - R(e_i,e_j,e_k,e_l)\,\varphi(e_i,e_k)\,\varphi(e_j,e_l)\} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(e'_i,e'_j,e'_i,e'_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

Если, кроме того, принять во внимание разложение (1), то интегральной формуле (2) можно придать вид:

$$\int_M\{\sum_{i,j=1}^{n} R(e'_i,e'_j,e'_i,e'_j)(\lambda_i-\lambda_j)^2 + 2\|Pr_{S^3_0 M}\nabla\varphi\|^2 - \|Pr_{Y^1_2}\nabla\varphi\|^2 - n\|Pr_{(T^*M)}\nabla\varphi\|^2\}\,dv = 0. \tag{3}$$

Теперь нетрудно определить, при каких условиях тот или иной класс тензорных полей из приведенного в первой части списка будет пустым на (M,g). Так, например, для тензорных полей класса

R_1 формула (3) перепишется так:

$$\int_M \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} R(e'_i, e'_j, e'_i, e'_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 + 2\,\| \mathrm{Pr}_{S_0^2 M} \nabla\varphi \|^2 \Big\}\, dv = 0. \qquad (4)$$

На основании новой формулы (4) заключаем, что на компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) положительной секционной кривизны класс R_1 пуст, если же секционная кривизна неотрицательная, то R_1 совпадает с R_0.

Для любого тензорного поля классов R_2, R_3 и R_6 из (3) последует

$$\int_M \Big\{ \sum_{i,j=1}^{n} R(e'_i, e'_j, e'_i, e'_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 \Big\}\, dv \geqslant 0. \qquad (5)$$

Таким образом, на компактном ориентированном римановом многообразии (M, g) отрицательной секционной кривизны классы R_2, R_3 и R_6 пусты, если же секционная кривизна неположительная, то перечисленные классы совпадают с R_0.

Библиографический список

1. Б у р г и н ь о н Ж.П. Формулы Вейценбека в размерности 4 // Четырехмерная риманова геометрия. М.: Мир, 1985. С.260-273.

2. Б е с с е А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т.2.

3. С т е п а н о в С.Е. Техника Бохнера в теории римановых структур почти произведения // Матем. заметки. 1990. Т.48. № 2. С.93-98.

УДК 514.75

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ ГИПЕРПОЛОС

А.В.С т о л я р о в

(Чувашский педагогический институт)

В настоящей работе рассматриваются пути приложения двойственной теории m-мерных регулярных гиперполос к изучению геометрии поверхностей V_m, погруженных в n-мерное проективное пространство P_n $(2 < m < n-1)$.

В.В.Вагнер во второй части работы [1] рассматривает теорию поля локальных регулярных гиперполос в дифференциально-геометрическом пространстве X_n и ее различные приложения: а) к задаче вариационного исчисления на безусловный экстремум, б) к вариационной задаче Лагранжа, в) к неголономной геометрии V_n^m в X_n, г) к динамике склерономных механических систем с нелинейными неголономными связями. Вопросы приложения теории поля локальных гиперполос в геометризацию динамики систем с неголономными связями рассматривает также А.В.Гохман [2].

В работе [3] нами найдены различные приложения теории m-мерных регулярных гиперполос H_m, погруженных в n-мерное проективное пространство P_n, к изучению геометрии поверхностей $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$. Основой всех этих приложений служит следующая теорема (см. [3]): поверхность $V_m \subset P_n$ $(m > 2)$, отличная от гиперповерхности, в дифференциальной окрестности 3-го порядка порождает инвариантно присоединенную к ней гиперполосу H_m, для которой данная поверхность является базисной; условием регулярности H_m является невырожденность симметрического тензора 3-го порядка $b_\alpha \Lambda^\alpha_{ij}$, $i,j = \overline{1,m}$; $\alpha = \overline{m+1,n}$.

Для регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$, инвариантно присоединенной к поверхности V_m $(2 < m < n-1)$, справедливы результаты, полученные нами в работах [4] - [8]; здесь мы перечислим основные из них (применительно к поверхности $V_m \subset P_n$).

1) Используя схему доказательства полноты фундаментального объекта для $H_m \subset P_n$ [4], имеем, что порядок полного внутреннего фундаментального объекта поверхности $V_m \subset P_n$ не превосходит шести. Отметим, что согласно работе [9] для поверхности $V_m \subset P_n$ $(2 < m < n-1)$ ее фундаментальный геометрический объект порядка не ниже 5-го порядка является полным, ибо внутреннее оснащение (в смысле Э.Картана [17]) поверхности возможно построить лишь в 4-й дифференциальной окрестности.

Заметим, что указанный результат устанавливает лишь верхнюю границу порядка полного внутреннего фундаментального объекта поверхности $V_m \subset P_n$. Не исключено, что эта граница допускает понижение на единицу; например, в случае поверхности $V_m \subset P_n$ частного класса, а именно, поверхности Картана $V_m \subset P_{2n}$, $m > 2$ нам удалось доказать [10], что ее фундаментальный геометрический объект 5-го порядка является полным.

2) В дифференциальной окрестности 5-го порядка точки $A_0 \in V_m$ имеем поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1} гиперполосы H_m [4] (а следовательно, ее базисной поверхности V_m). Следует заметить, что гиперквадрики этого поля отличны от инвариантных соприкасающихся гиперквадрик поверх-

13 Зак. 1399